Μαθημα 6ο — 14/3/2018

Κλασσικη Μηχανικη

Μοναδιαιο Εφαπτομενο Διανυσμα

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

ο συμβολισμος αυτος εχει μεσα του το χρονο

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = |\vec{v}|\,\frac{d\vec{r}}{ds}$$

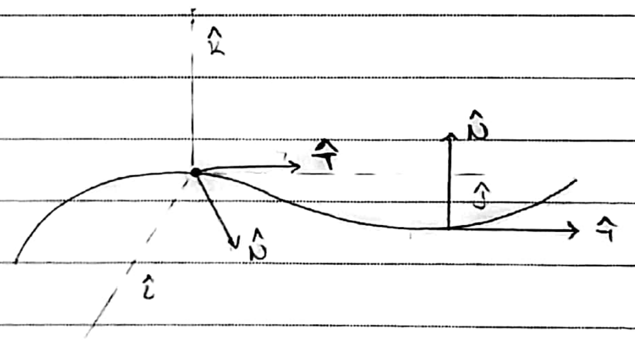
Οποτε το $\hat{T}$ θα γινει ως εξης

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{|\vec{v}|\, d\vec{r}/ds}{|\vec{v}|} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

Καμπυλοτητα

$$\kappa = \frac{1}{|\vec{v}|}\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right| = \frac{1}{|\vec{v}|}\cdot\left|\frac{d\hat{T}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\right| = \frac{1}{|\vec{v}|}\left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right||\vec{v}| \Rightarrow$$

$$\kappa = \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right|$$



Ορισμος

Ορίζουμε σε σημείο της καμπύλης με καμπυλότητα $\kappa \neq 0$ το πρωτεύον μοναδιαίο διάνυσμα.

$$\hat{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\hat{T}}{ds} = \frac{1}{|d\hat{T}/ds|}\frac{d\hat{T}}{ds}$$

Το διανυσμα αυτο δειχνει παντα προς την κοιλη πλευρα της καμπυλης κανονας αλυσιδας

$$\hat{N} = \frac{1}{\kappa}\cdot\frac{d\hat{T}}{ds} = \frac{1}{\kappa}\cdot\frac{d\hat{T}/ds}{ds/dt} = \frac{1}{\kappa}\cdot\frac{d\hat{T}/dt}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\frac{1}{|\vec{v}|}\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|}\frac{d\hat{T}/dt}{|\vec{v}|} =$$

$$= \frac{d\hat{T}/dt}{|d\hat{T}/dt|} \quad \text{με} \quad \hat{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|}$$

Προφανως $\hat{N}\cdot\hat{T} = 0$

Θα δειξαμε οτι $\hat{N}\cdot\hat{T} = 0$ → Δε μπορω να το αντικαταστησω γιατι ειναι γενικη η καμπυλη μου αρα θα αντικαταστησω το $\hat{T}$

$\hat{N}\cdot\hat{T} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d\hat{T}}{dt} = 0$

→ Να το δειξω σπιτι ↑

Παραδειγμα 1

Να βρειτε τα μοναδιαια διανυσματα της κινησης $\vec{r} = \cos(2t)\,\hat{i} + \sin(2t)\,\hat{j}$

απαντηση

Η κινηση γινεται πανω στον μοναδιαιο κυκλο $x^2+y^2=1$

$x = \cos(2t)$ με $0 \le t \le \pi$ (Προσοχη στο που θα παρω το t)

$y = \sin(2t)$

$x<0$ και $y>0$

$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -2\sin(2t)\,\hat{i} + 2\cos(2t)\,\hat{j}$ και $|\vec{v}| = 2$

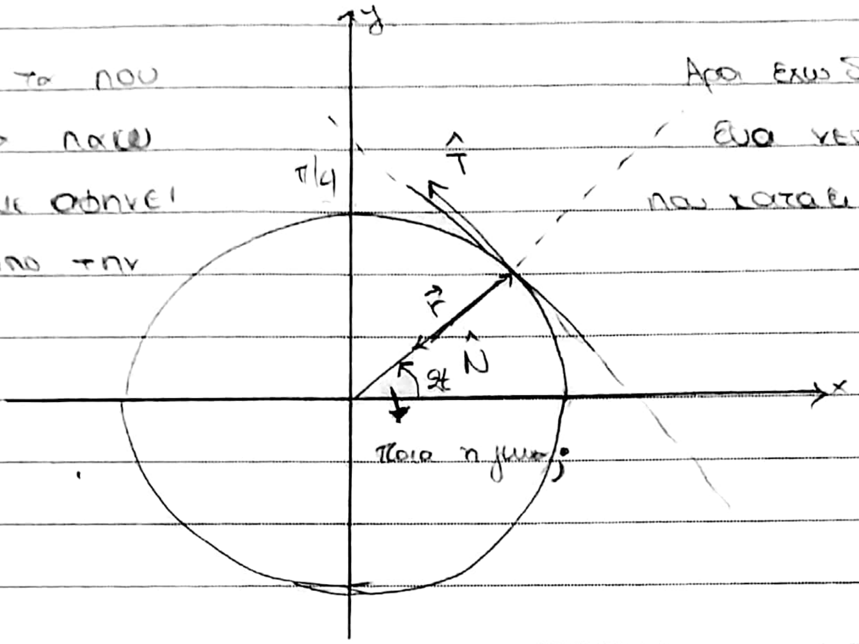
οποτε $\hat{T} = \frac{-2\sin(2t)\,\hat{i} + 2\cos(2t)\,\hat{j}}{2} = -\sin(2t)\,\hat{i} + \cos(2t)\,\hat{j}$

και $\hat{N} = \frac{1}{\underbrace{|d\hat{T}/dt|}_{=2}}\cdot\frac{d\hat{T}}{dt}$ με $\frac{d\hat{T}}{dt} = -2\cos(2t)\,\hat{i} - 2\sin(2t)\,\hat{j}$,

αρα $\hat{N} = -\cos(2t)\,\hat{i} - \sin(2t)\,\hat{j}$ → Δηλ εχω $x<0$ και $y<0$

Έλεγχος: $\hat{N} \cdot \hat{T} = \cos(2t)\sin(2t) - \cos(2t)\sin(2t) = 0$ άρα είμαστε οκ!

4 άρα το που θέλω να πάω $\hat{N}$: δε με αφήνει να βγω από την τροχιά



Άρα έχω δημιουργήσει ένα νέο σύστ. συντ. που κρατάει την τροχιά μου

Δεν έχω τώρα το κύκλο σε π/2 αλλά σε π/4 κινούμαι πιο γρήγορα δηλαδή

Άσκηση (σπίτι)

Να επαναλάβετε την άσκηση για $\vec{r} = \cos(t)\,\hat{i} + \sin(2t)\,\hat{j}$ και
$\vec{r} = \cos(2t)\,\hat{i} + \sin(t)\,\hat{j}$

* Σπίτι*

Νέο σύστημα συντεταγμένων

Για να περιγράψουμε κίνηση σε 3 διαστάσεις ορίζουμε ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των $\hat{\tau}$, $\hat{N}$ τέτοιο ώστε

$\hat{B} = \hat{\tau} \times \hat{N}$

Πλέον τα διανύσματα $\hat{\tau}, \hat{N}, \hat{B}$ ορίζουν ένα κινούμενο δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς.

Ιδιότητες:

1. $\dfrac{d\hat{B}}{ds} = \dfrac{d\hat{B}/dt}{ds/dt} = \dfrac{1}{|\vec{v}|} \cdot \dfrac{d\hat{B}}{dt}$ άλλος συμβολισμός

Άρα $\dfrac{d\hat{B}}{ds} = \underbrace{\dfrac{d\hat{\tau}}{ds} \times \hat{N}}_{=0} + \hat{\tau} \times \dfrac{d\hat{N}}{ds} = \hat{\tau} \times \dfrac{d\hat{N}}{ds}$

με $\hat{N} = \dfrac{1}{\kappa} \dfrac{d\hat{\tau}}{ds}$

Δηλαδή το διάνυσμα $\dfrac{d\hat{B}}{ds} \perp \hat{\tau}$ και $\dfrac{d\hat{B}}{ds} \perp \dfrac{d\hat{N}}{ds}$

$\dfrac{d\hat{B}}{ds} \perp \hat{B}$ άρα $\dfrac{d\hat{B}}{ds} \parallel \hat{N}$

Βάση της παραλληλίας ορίζω $\dfrac{d\hat{B}}{ds} = -\tau \hat{N}$, τ η στρέψη

(το αρνητικό πρόσημο προήλθε από σύμβαση)

Δηλαδή $\tau = -\hat{N} \cdot \dfrac{d\hat{B}}{ds}$

Παρατηρησεις

1. Η καμπυλοτητα κ ειναι παντα θετικη
2. Η στρεψη τ παιρνει ολες τις τιμες θετικες και αρνητικες
3. Η καμπυλοτητα ειναι ο ρυθμος με τον οποιο στρεφεται το καθετο επιπεδο καθως το σωματιδιο διανυει τη τροχια του
4. Η στρεψη ειναι ο ρυθμος με το οποιο το συνεφαπτομενο επιπεδο στρεφεται περι τον αξονα του $\vec{T}$ και μετρα ποσο περιελισσετε η καμπυλη

$$\vec{r} = (a\cos t)\,\hat{i} + (a\sin t)\,\hat{j} + (bt)\,\hat{k} \quad , \quad a, b \geq 0 \quad , \quad a^2+b^2 \neq 0$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (-a\sin t)\,\hat{i} + (a\cos t)\,\hat{j} + b\hat{k}$$

κυκλος ακτινας a στο επιπεδο $z=b$

Γ Η παραμυχος της ελικας ειναι ενας κυκλος στο επιπεδο

Μετρο ταχυτητας

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

- $$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\sin t\,\hat{i} + a\cos t\,\hat{j} + b\hat{k}\right)$$

- $$\hat{N} = \frac{1}{|d\hat{T}/dt|} \cdot \frac{d\hat{T}}{dt} \quad , \quad \frac{d\hat{T}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\cos t\,\hat{i} - a\sin t\,\hat{j} + 0\hat{k}\right)$$

- $$\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right| = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\hat{B} = \hat{T}\times\hat{N} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(b\sin t\,\hat{i} - b\cos t\,\hat{j} + a\hat{k}\right)$$

⊛ Στο νέο σύστημα συντεταγμένων τα μεγέθη θα πρέπει να περιγράφονται από τα νέα διανύσματα.

Δηλαδή γνωρίζουμε ότι $\hat{T} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \Leftrightarrow \vec{v} = |\vec{v}|\cdot\hat{T}$

Αντίστοιχα η επιτάχυνση είναι $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \dfrac{d}{dt}\left(|\vec{v}|\cdot\hat{T}\right) =$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{ds}{dt}\hat{T}\right] = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{T} + \frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\hat{T}}{dt}, \quad \frac{d\hat{T}}{dt} = \frac{d\hat{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\kappa\hat{N}$$

όμως $\hat{N} = \dfrac{1}{\kappa}\dfrac{d\hat{T}}{ds}$ οπότε η επιτάχυνση θα γίνει

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{T} + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\hat{N}$$

$\dfrac{d^2s}{dt^2}\hat{T}$: εφαπτομενικό στην καμπύλη

$\kappa\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2\hat{N}$: με κρατάει πάνω στη καμπύλη

Άρα $a_T = \dfrac{d^2s}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}|\vec{v}|$ επιτρόχιος επιτάχυνση

↳ πόσο γρήγορα επιταχύνω

$a_N = \kappa\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = \kappa|\vec{v}|^2$ κεντρομόλος επιτάχυνση

Συνολικά $|\vec{a}|^2 = a_T^2 + a_N^2 = \left|\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right|^2$

Παρατηρηση

Δειξαμε οτι $\vec{v} = |\vec{v}|\,\hat{T}$ και $\vec{a} = \frac{d^2 s}{dt^2}\hat{T} + \kappa|\vec{v}|^2\hat{N}$

Τοτε

$$\vec{v}\times\vec{a} = |\vec{v}|\cdot\hat{T}\times\left[\frac{d^2 s}{dt^2}\hat{T} + \kappa|\vec{v}|^2\hat{N}\right] =$$

$$= |\vec{v}|\,\kappa|\vec{v}|^2\underbrace{\hat{T}\times\hat{N}}_{=\hat{B}} = \kappa|\vec{v}|^3\hat{B} \Rightarrow \vec{v}\times\vec{a} = \kappa|\vec{v}|^3\hat{B}$$

Μετρο: $|\vec{v}\times\vec{a}| = \kappa|\vec{v}|^3 \Rightarrow \kappa = \dfrac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|^3}$

→ για την καμπυλοτητα λοιπον χρειαζομαι μονο ταχυτητα

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Με τον ιδιο τροπο μπορουμε να δειξουμε οτι η στρεψη ειναι

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\vec{v}\times\vec{a}|^2}, \quad \vec{v}\times\vec{a} \neq 0$$

Συνολικα λοιπον για το διανυσμα θεσης $\vec{r}(t)$ οριζουμε

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt}$$

$$\hat{T} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \quad \hat{N} = \frac{1}{\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right|}\cdot\frac{d\hat{T}}{dt} = \frac{1}{\kappa}\cdot\frac{d\hat{T}}{ds}, \quad \hat{B} = \hat{T}\times\hat{N}$$

$$\kappa = \left|\frac{d\hat{T}}{ds}\right| = \frac{1}{|\vec{v}|}\left|\frac{d\hat{T}}{dt}\right| = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|\vec{v}|^3}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}|\vec{v}| \cdot \hat{T} + k|\vec{v}|^2 \cdot \hat{N}$$

$$\tau = -\frac{d\hat{B}}{ds} \cdot \hat{N} = -\frac{1}{|\vec{v}|} \frac{d\hat{B}}{dt} \cdot \hat{N}$$

και ετσι γραψαμε τα παντα στο νεο συστημα συντεταγμενων